①

رياضيات رابعة

وزارة التعليم العالي — الامتحان النهائي — الاسم :

جامعة البعث — لمقرر تحليل (٣) السنة الثانية رياضيات — الدرجة ١٠٠

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الدورة التكميلية لعام ٢٠١٥- ٢٠١٦ — المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (٣٠درجة) (أ) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{2n} x^{2n}$$

(ب) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي الآتي وأحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right]$$

السؤال الثاني (٣٦درجة) (أ) أدرس التقارب المنتظم لمتتاليتي الدوال التي حدها العام يعطى بالشكل :

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \quad , \ \forall\ x \in R \quad , \quad n \in N$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \tan^{-1} x^n \quad , \ \forall\ x \in R$$

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2} \qquad , \quad \forall\ x \in [0,\infty[$$

السؤال الثالث (٣٤درجة) : (أ) أوجد منشور فورييه للدالة : $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ على المجال $]0,\pi[$

الذي يحوي الجيوب فقط .

(ب) مستخدماً التكاملات الأولرية ،أوجد التكامل الآتي :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{sin^{2n+1}x}{x}\, dx \qquad ,(n = 1,2,3 \ldots\ldots)$$

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٢ /٨/٢٠١٦ — مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

استاذ المقرر

د. منير مخلوف

جامعة البعث

سلم تصحيح الامتحان النظري

مقرر تحليل /٣/ السنة الثانية رياضيات

كلية العلوم قسم الرياضيات ... الدورة التكميلية لعام $\frac{٢٠١٥}{٢٠١٦}$ ... الدرجة ١٠٠

جواب السؤال الأول: (أ) باستخدام اختبار (جيمس) الجذري نجد أن:

30 درجة فقط ... أنه من أجل $x \neq 0$ لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4|x|^2}{1}\right] = 4|x|^2$$

وبالتالي فإن السلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً عندما $|x| < \frac{1}{2}$ 8

ومتباعدة عندما $|x| > \frac{1}{2}$ ونصف قطر تقاربها $r = \frac{1}{2}$

كما أن هذه السلسلة متقاربة عندما $x = \pm\frac{1}{2}$ وذلك لأنها تؤول إلى السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ المتقاربة حسب اختبار ليبنتز بالطبع

4 المتتالية $\left(\frac{1}{2n}\right)$ متناقصة و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

4 وعليه فإن مجال التقارب المطلوب هو $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

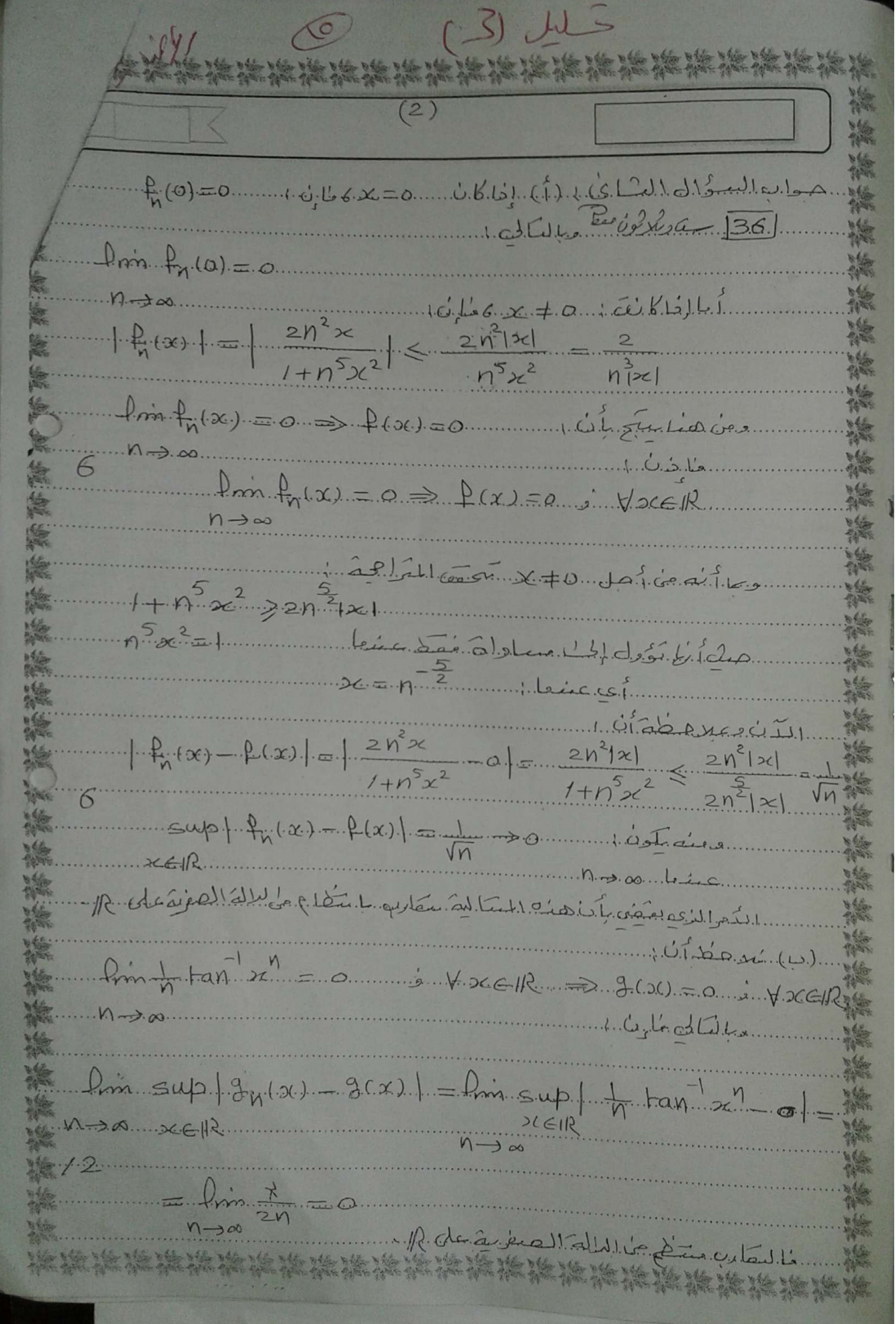
(ب) نلاحظ أن:

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\right) =$$

10 $$P_n = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \Rightarrow$$

$$P_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}$$

4 فالجداء اللانهائي المفروض متقارب وقيمته تساوي $P = \frac{1}{3}$



جواب السؤال الثاني : (أ) إذا كان $x=0$ فإن $f_n(0)=0$

36 وبالتالي يكون

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$$

أما إذا كانت $x\neq 0$ فإن

$$|f_n(x)| = \left|\frac{2n^2x}{1+n^5x^2}\right| \le \frac{2n^2|x|}{n^5x^2} = \frac{2}{n^3|x|}$$

ومن هنا نستنتج بأن $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$

6 وهكذا فإن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow f(x)=0 \; ; \; \forall x\in\mathbb{R}$$

وبما أنه من أجل $x\neq 0$ تتحقق المتراجحة:

$$1+n^5x^2 \ge 2n^{\frac{5}{2}}|x|$$

حيث أن تؤول إلى مساواة فقط عندما $n^5x^2=1$

أي عندما: $x=n^{-\frac{5}{2}}$

الآن نلاحظ أن

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{2n^2x}{1+n^5x^2}-0\right| = \frac{2n^2|x|}{1+n^5x^2} \le \frac{2n^2|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

6 ومنه يكون: $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ عندما $n\to\infty$

الأمر الذي يعني بأن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$

(ب) نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\tan^{-1} x^n = 0 \; ; \; \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow g(x)=0 \; ; \; \forall x\in\mathbb{R}$$

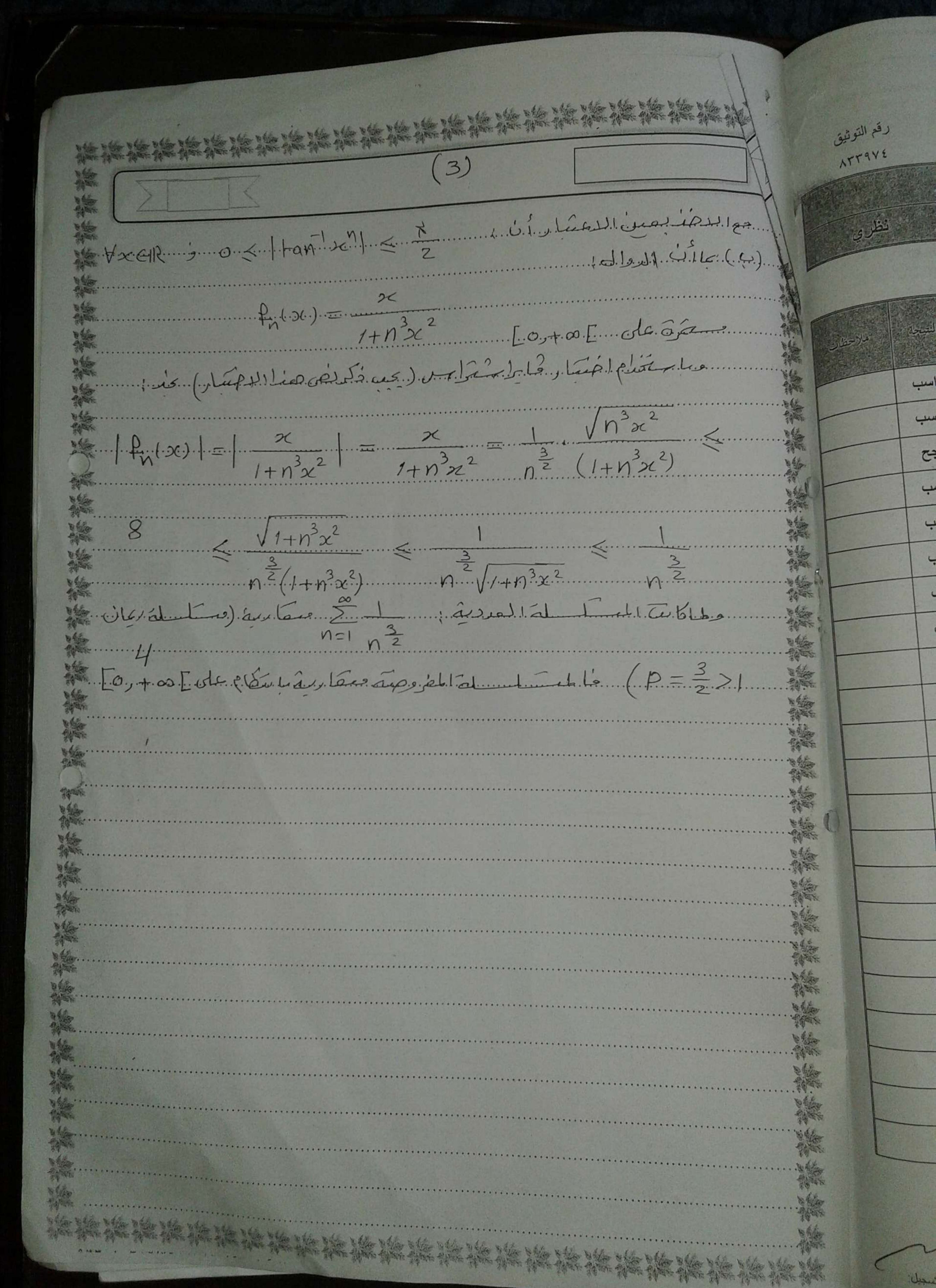
وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|g_n(x)-g(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\tan^{-1}x^n - 0\right| =$$

12

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}=0$$

فالتقارب منتظم من الدالة الصفرية على $\mathbb{R}$



(3)

مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$0 \le |\tan^{-1} x^n| \le \frac{\pi}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

(ب) بيّن أن الدوال:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^2}$$

مستمرة على $[0,+\infty[$

وباستخدام اختبار فايرشتراس (يجب ذكر نص هذا الاختبار) نجد:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+n^3x^2}\right| = \frac{x}{1+n^3x^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{n^3x^2}}{(1+n^3x^2)} \le$$

8

$$\le \frac{\sqrt{1+n^3x^2}}{n^{\frac{3}{2}}(1+n^3x^2)} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+n^3x^2}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

وطالما كانت المتسلسلة العددية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة (متسلسلة ريمان

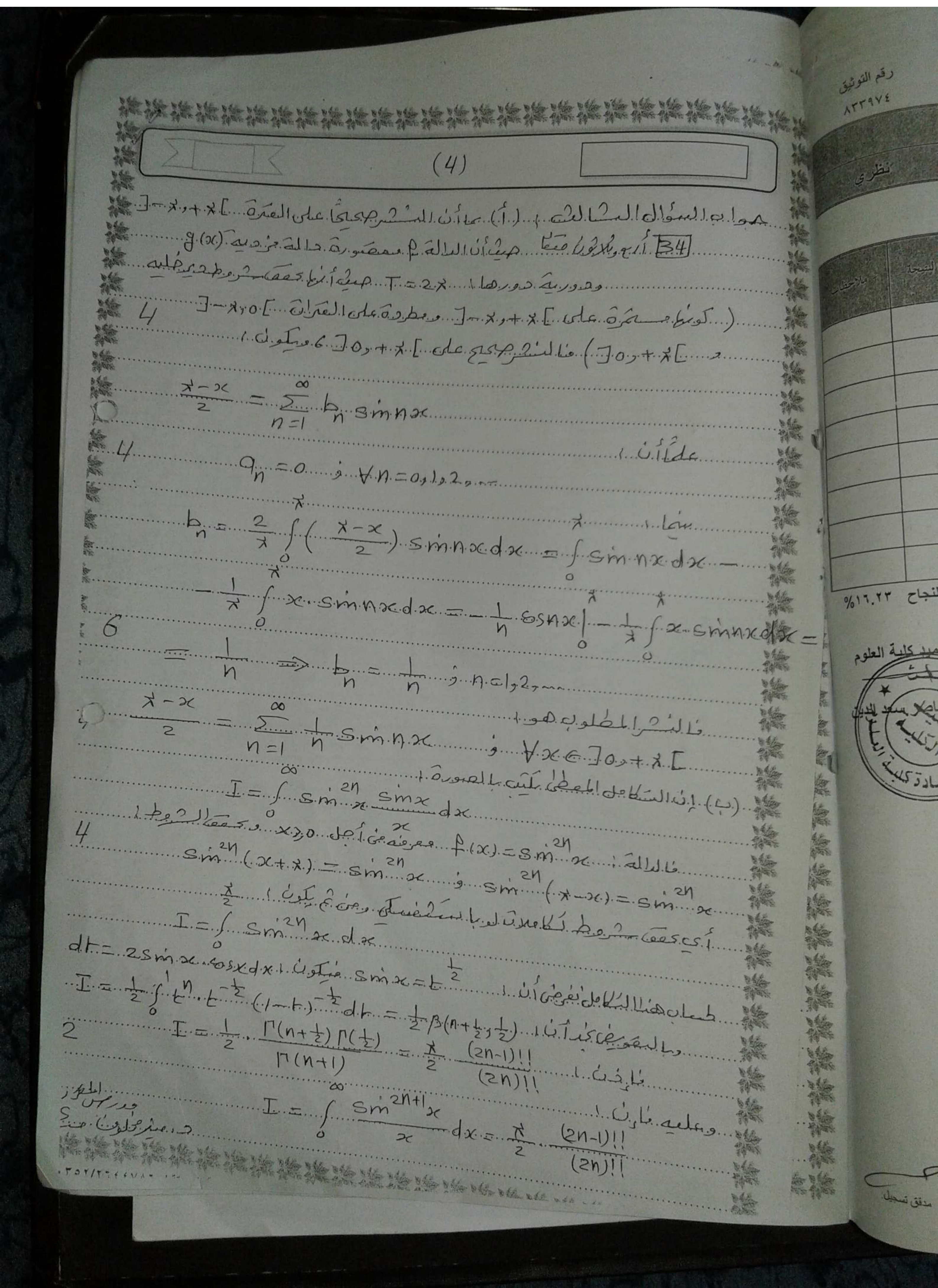
4

$p = \frac{3}{2} > 1$) فالمتسلسلة المطروحة متقاربة بانتظام على $[0,+\infty[$

رقم التوثيق
٨٣٣٩٧٤

نظري

النتيجة	ملاحظات



(4)

جواب السؤال الثالث : (أ) بما أن المنشور صحيحاً على الفترة $]-\pi,+\pi[$ أي B4 ولا يكون فقط حيث أن الدالة f محصورة دالة جزئية $g(x)$ ودورية دورها $T=2\pi$ حيث أنها تحقق شروط ديريخليه

4 (كونها مستمرة على $]-\pi,+\pi[$ ومطردة على الفترات $]-\pi,0[$ و $]0,+\pi[$) فالمنشور صحيح على $]0,+\pi[$ ويكون :

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

4 علماً أن : $a_n=0$; $\forall n=0,1,2,\dots$

ومنه : $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx-$

$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$

6 $=\frac{1}{n}\Rightarrow b_n=\frac{1}{n}$; $n=1,2,\dots$

فالنشر المطلوب هو :

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \quad ; \quad \forall x\in]0,+\pi[$$

(ب) إن التكامل المعطى يكتب بالصورة :

$$I=\int_0^{\infty}\sin^{2n}x\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

4 فالدالة : $f(x)=\sin^{2n}x$ معرفة من أجل $x\geq 0$ وتحقق الشروط :

$\sin^{2n}(x+\pi)=\sin^{2n}x$ و $\sin^{2n}(\pi-x)=\sin^{2n}x$

أي تحقق شروط تكامل لوباتشيفسكي ومنه يكون :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx$$

بفرض أن : $\sin x=t^{\frac{1}{2}}$ فيكون : $dt=2\sin x\cos x\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\beta(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ فيصبح هنا التكامل بالشكل :

2 وبالتعويض نجد أن : $I=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ فإن :

وعليه فإن :

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2n+1}x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

المطرز
د. ...